إيجاد الخواص

X منتهي، ننظر على المجموعة A

A منتهية: $A' = \phi$ ، $\overline{A} = A$ ، $A^\circ = \phi$

A غير منتهية: $A' = A$ ، $\overline{A} = X$ ، A° ← X\A منتهية $A^\circ = A$ ، X\A غير منتهية $A^\circ = \phi$

X غير منتهي، ننظر على τ:

(1)- τ لا تحوي نقاط منعزلة:

τ قوي: $A' = \phi$ ، $\overline{A} = A$ ، $A^\circ = A$

τ ضعيف: $A' = X$ ، $\overline{A} = X$ ، $A^\circ = \phi$

(2) τ تحتوي على نقاط منعزلة، هنا ننظر إلى A

A تحوي النقاط المنعزلة: $A' = X\setminus$ النقاط المنعزلة ، $\overline{A} = X$ ، $A^\circ = A$

A لا تحوي النقاط المنعزلة: $A' = \phi$ ، $\overline{A} = A$ ، $A^\circ = \phi$

ملاحظات: إذا كانت X على شكل مجال [ ] $X = [a, b, \dots]$ هذا يعني أن X تشكل مجموعة غير منتهية.

إذا كانت $A = Z$ ⇐ A منتهية لأن X هنا $\mathbb{R}$

إذا كانت $A = Q$ ⇐ A غير منتهية و X\A غير منتهية.

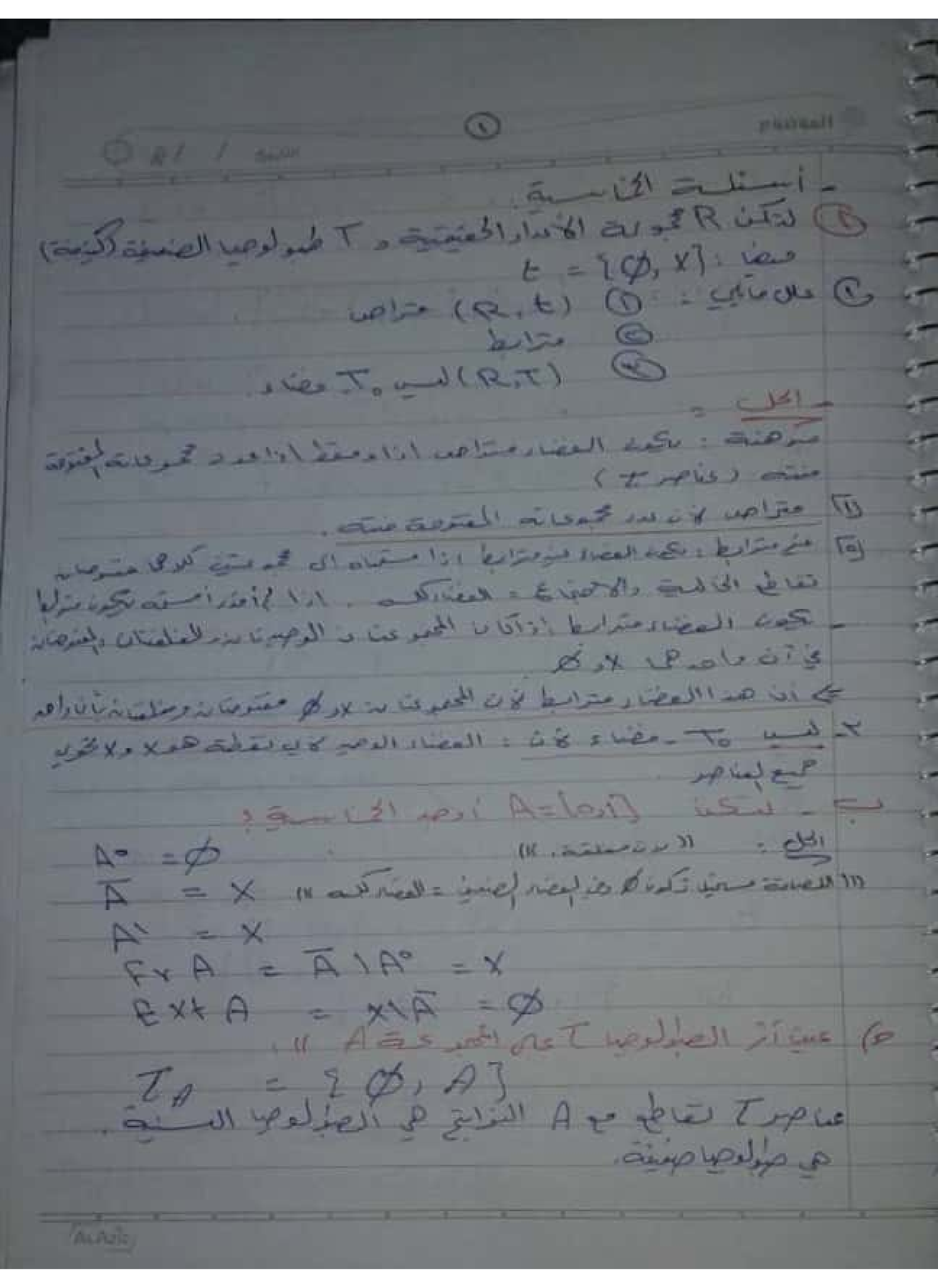
الداخلية داخل أطراف المجال مفتوح من الطرفين وبدون النقاط المنعزلة.

اللصاقة المجال مغلق مع النقاط المنعزلة

المشتقة المجال مغلق بدون النقاط المنعزلة.

Ext A هي المجال كله عدا اللصاقة.

Fr A هي اللصاقة عدا الداخلية.



- أسئلة الحاسبة:

(1) لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية و T طوبولوجيا الضعيفة (الكيفية)

حيث: $t = \{\emptyset, X\}$

(2) حل ما يلي:

(1) (R, t) متراص

(2) مترابط

(3) (R, T) ليس T_0 فضاء.

- الحل:

مبرهنة: يكون الفضاء متراص إذا وفقط إذا وجد مجموعات مفتوحة منتهية (عناصر T)

[1] متراص لأن عدد مجموعاته المفتوحة منتهية.

[2] غير مترابط: يكون الفضاء غير مترابط إذا استطعنا إيجاد مجموعتين كل منهما مفتوحة تقاطعهما الخالية والاتحاد = الفضاء كله. إذا لم نجد أستطيع تكوين مترابط

- يكون الفضاء مترابط إذا كان المجموعتان الوحيدتان المغلقتان والمفتوحتان في آن واحد هي X و ∅

إذن هذا الفضاء مترابط لأن المجموعتين X و ∅ مفتوحتان ومغلقتان في آن واحد

2- ليس T_0 فضاء لأن: الفضاء الوحيد لأي نقطة هو X و X تحوي جميع العناصر

ب- لتكن $A=\{a\}$ أوجد الحاسوب:

الحل: "لا توجد مغلقة."

$A^\circ = \emptyset$

$\bar{A} = X$ "الصغيرة مستحيل تكون ∅ من الفضاء الضعيف = الفضاء كله"

$A' = X$

$Fr\,A = \bar{A} \setminus A^\circ = X$

$Ext\,A = X \setminus \bar{A} = \emptyset$

ج) عين أثر الطوبولوجيا T على المجموعة A "

$T_A = \{\emptyset, A\}$

عناصر T تقاطع مع A النواتج هي الطوبولوجيا النسبية.

هي طوبولوجيا ضعيفة.

* نفرض أن $X = \{a,b,c,d\}$ و t توبولوجيا على X المؤلفة من المجموعات التي تحوي العنصر a بالإضافة إلى الخالية:

$$t = \{\emptyset, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}, \{a,b,d\}, X\}$$

- هل هو متراص؟

نعم متراص لأن عدد مجموعات t المفتوحة منته.

- هل هو منفصل هاوسدورف؟

ليس t_2 منفصل لأن أي مجموعتين مفتوحتين لا بد أن تتقاطعا

- هل هو مترابط؟

هو مترابط لأنه لا نستطيع فصله. مجموعتين مفتوحتين تتقاطعان بـ a على الأقل.

- عين جوارات c هي مجموعات المفتوحة التي تحوي a

$$\{\{a,c\}, \{a,b,c\}, \{a,c,d\}, X\}$$

لأنه يأخذ منها c و a معاً.

- نفرض $A = \{b,c,d\}$ أوجد كلاً من:

$A^\circ = \emptyset$

A لأنه مغلقة

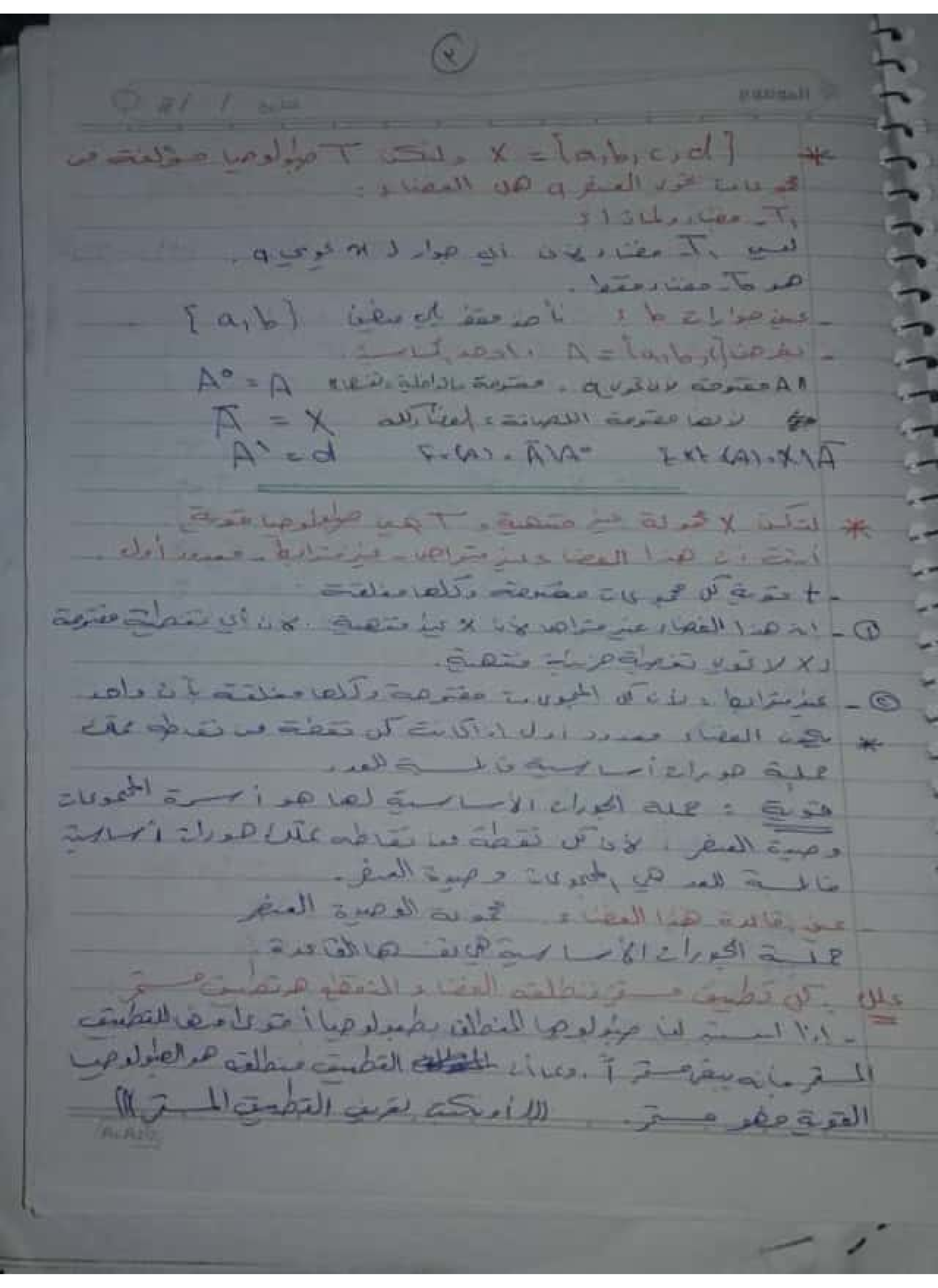
$\bar{A} = A$

$A' = \emptyset$ [illegible]

- عين t_A :

$$t_A = \{\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{b,c\}, \{c,d\}, \{b,c,d\}\}$$

$$t_A = \{U \cap A ; U \in t\}$$ حسب التعريف.



* لتكن $X = \{a,b,c,d\}$ ، ولتكن T توبولوجيا مؤلفة من كل المجموعات التي تحوي العنصر a من الفضاء:

(X,T) منفصل؟

ليس (X,T) منفصل لأن أي جوار لـ x يحوي a.

هو (X,T) منفصل دقيقاً.

- عين جوارات b : أصغر جوار لـ b هو $\{a,b\}$

- لتكن $A = \{a,b\}$ ، اوجد كل ما يلي.

A مفتوحة لأنها تحوي a ، مفتوحة بالداخلية فهي $A^\circ = A$

لأنها مفتوحة النهاية = المغلقة $\bar{A} = X$

$A' = d$ $F_r(A) = \bar{A} \setminus A^\circ$ $Ext(A) = X \setminus \bar{A}$

---

* لتكن X مجموعة غير منتهية ، T هي طوبولوجيا متممة المنتهية. اثبت أن هذا الفضاء غير متراص ، غير مترابط ، معدود أول.

- T متممة كل مجموعة منتهية وكلها مغلقة

① - ان هذا الفضاء غير متراص لأن X غير منتهية ، لأن أي تغطية مفتوحة لـ X لا تحوي تغطية جزئية منتهية.

② - غير مترابط ، لأن كل المجموعات مفتوحة وكلها مغلقة بآن واحد

* يكون الفضاء معدود أول إذا كانت كل نقطة من نقاطه تحقق جملة جوارات أساسية قابلة للعد.

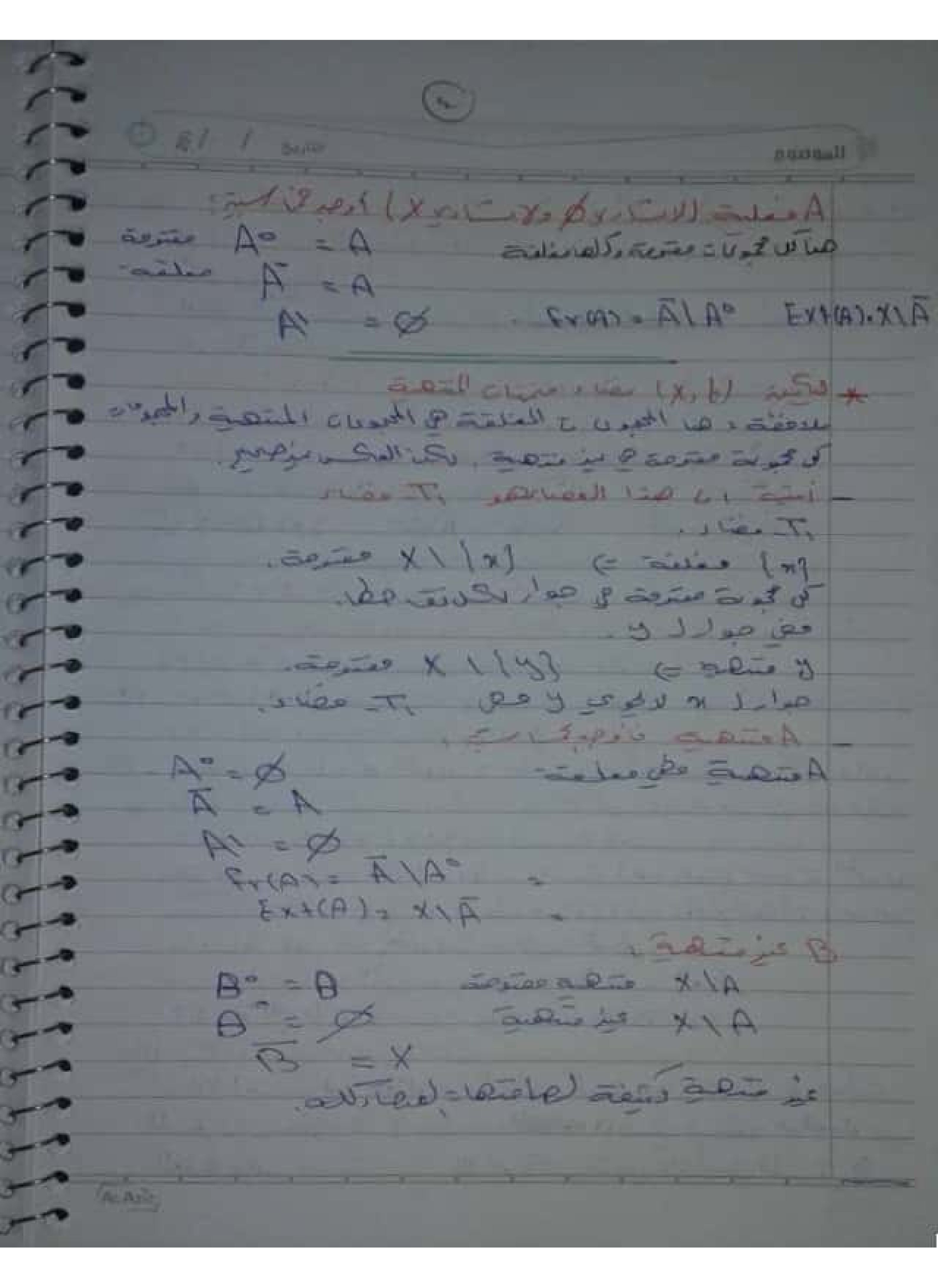
مثال : جملة الجوارات الأساسية لها هو أسرة المجموعات وحيدة العنصر ، لأن كل نقطة من نقاطه تحقق جملة جوارات أساسية قابلة للعد هي المجموعات وحيدة العنصر.

- عين قاعدة هذا الفضاء. مجموعة الوحيدة العنصر

جملة الجوارات الأساسية هي نفسها القاعدة.

ملاحظة: كل تطبيق منطلقه الفضاء المتقطع هو تطبيق مستمر

- إذا استبدلنا طوبولوجيا المنطلق بطوبولوجيا أقوى (أنعم) فإن التطبيق المستمر يبقى مستمراً. ومنه التطبيق منطلقه هو الطوبولوجيا الأقوى فهو مستمر. (لا يمكن تعريف التطبيق المستمر!!)



الموضوع

A مغلقة (لا تساوي ∅ ولا تساوي X) أوجد في النسبة:

هنا كل مجموعات مفتوحة وكلها مغلقة

$A^\circ = A$ مفتوحة

$\bar{A} = A$ مغلقة

$A' = \emptyset$

$Fr(A) = \bar{A} \setminus A^\circ$, $Ext(A) = X \setminus \bar{A}$

---

* تكوين $(X, \mathcal{T}_f)$ فضاء متممات المنتهية

ملاحظة: هنا المجموعات المغلقة هي المجموعات المنتهية والمجموعة X، كل مجموعة مفتوحة هي غير منتهية. لكن العكس غير صحيح.

- أثبت أن هذا الفضاء T_1 فضاء:

T_1 فضاء.

$\{x\}$ مغلقة ⇐ $X \setminus \{x\}$ مفتوحة.

كل مجموعة مفتوحة في جوار تحتوي فقط [illegible] هي جوار لـ y.

y منتهية ⇐ $X \setminus \{y\}$ مفتوحة.

جوار x لا يحوي y وهو T_1 فضاء.

- A منتهية فأوجد [illegible]:

A منتهية فهي مغلقة.

$A^\circ = \emptyset$

$\bar{A} = A$

$A' = \emptyset$

$Fr(A) = \bar{A} \setminus A^\circ$

$Ext(A) = X \setminus \bar{A}$

B غير منتهية:

$X \setminus A$ منتهية مفتوحة

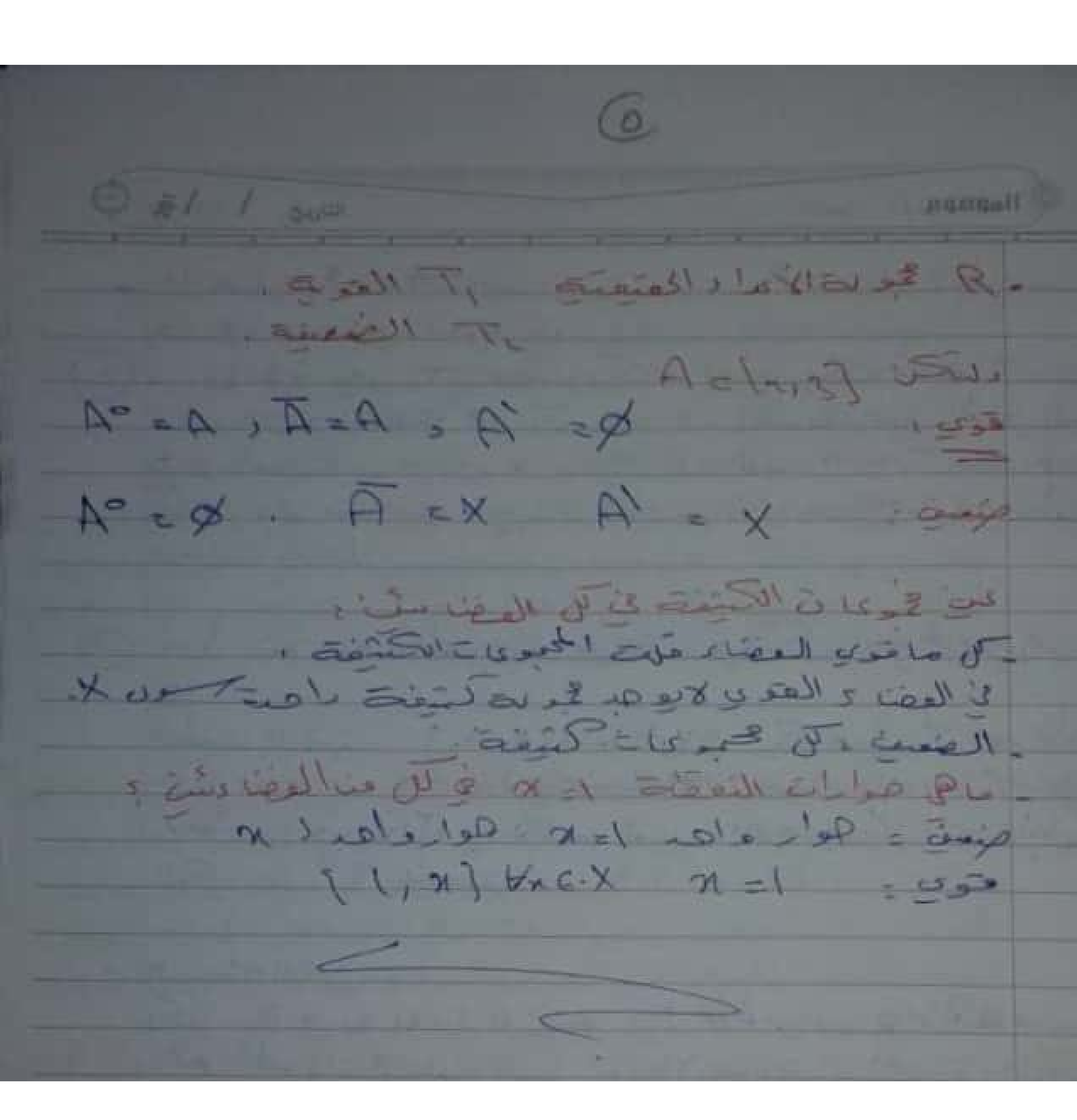
$X \setminus A$ غير منتهية

$B^\circ = B$

$B^\circ = \emptyset$

$\bar{B} = X$

غير منتهية كثيفة لصاحبتها للفضاء كله.



الموضوع .... التاريخ / / ١٤هـ

- R مجموعة الأعداد الحقيقية، T_1 القوية، T_2 الضعيفة.

ولنكن $A \subset [1,3]$

قوي: $A^\circ = A$, $\bar{A} = A$, $A' = \emptyset$

ضعيف: $A^\circ = \emptyset$. $\bar{A} = X$ $A' = X$

كثف مجموعات الكثيفة في كل الفضاءين:

- كل ما تحوي الفضاء فقط المجموعات الكثيفة،
في الفضاء القوي لا يوجد مجموعة كثيفة واحدة سوى X.
- الضعيف: كل مجموعات كثيفة.
- ما هي جوارات النقطة $x = 1$ في كل من الفضاءين:

ضعيف: جوار واحد $x = 1$ جوار واحد لـ x

قوي: $x = 1$ $\{1\}$ $\forall x \in X$ $\{x\}$